Lebesgue 积分的产生及其影响 *

(迎接 ICM2002 特约文章)

Jean-Pierre Kahane

(法国科学院院士)

编者注 这是一篇由法国科学院院士 Kahane 为纪念 Lebesgue 积分 100 周年而写的文章, 原文发表在《巴黎科学院通报》上. 文章讲述了 Lebesgue 积分创立的历史背景及其影响. 经作者同意, 由武汉大学范爱华教授翻译成中文在本刊发表.

MR(1991)主题分类 01A60

几个月前, Gustave Choquet 向科学院数学部建议举办 Lebesgue 积分百年纪念活动. 的确, Lebesgue 积分给 20 世纪数学的发展留下了深深的烙印. 100 年前, 也就是 1901 年 4 月 29 日, Lebesgue 积分以一篇短文的形式出现在科学院通报上 [1], 该文的标题是《论定积分的一种推广》.

Choquet 的建议得到的第一个反应是 Jean-Michel Bony, Gustave Choquet 和 Gilles Lebeau 的一篇纪念性文章. 该文刚刚发表在科学院通报上 [2].

第二个反应是我在科学院做的这个演讲.

第三个反应是 4 月 27 、 28 日将在里昂高等师范学校举办的讨论会. 这个讨论会是由我们的同事 Etienne Ghys 发起的, 面向高等师范学校的学生和该地区的教师. 讨论会得到了里昂高等师范学校和法国数学会的支持.

我准备谈一谈 Lebesgue 积分的产生及其影响. 我已经说过, Lebesgue 积分产生于科学院通报上的一篇短文, 我们现在从屏幕上看到的是该文的第 1 页 [3]. 借此机会, 先向大家简单介绍一下那个时候的科学院通报. 接下来, 我将介绍 Lebesgue 其人以及与他同时代的 Emile Borel 和 René Baire. 然后再谈数学. 我将试图向大家解释 Lebesgue 积分与 Riemann 积分的不同之处, 以及使 Lebesgue 感兴趣的与之相关的三大问题: 原函数的计算、面积的度量和三角级数. 这将是关于积分的产生, 也即我所要说的一切.

Lebesgue 积分在各方面的影响不胜枚举. Lebesgue 积分和 Lebesgue 测度在 20 世纪数学的两个领域, 即泛函分析和概率论, 起了决定性的作用. 我仅限于回顾两个方面: 1907 年的 Riesz-Fisher 定理和 20 世纪 20-30 年代 Nobert Wiener 所建立的 Brown 运动理论. 我还将从历史的角度出发对测度和积分这两个概念的演变做一些说明, 从而结束我的演讲.

科学院的档案中保存了 1901 年 4 月 29 日发表的 Lebesgue 的文章的手稿. 4 页手稿被切

收稿日期: 2001-11-05.

* 原文标题为 Naissance et postérité de l'intégrale de Lebesgue. (译者注. 全文的脚注均为译者注.)

1 科学院通报即 Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris. 通常简写为 C. R. Acad. Sci. Paris

2 Le centenaire de l'intégrale de Lebesgue, C. R. Acad. Sci. Paris, t.322, Sér. I, 85-90, 2001. 该文全文引用了 Lebesgue 的原文, 并做了注解.

3 Lebesgue 的原文重刊于 C. R. Acad. Sci. Paris, t.322, Sér. I, 86-88, 2001. 见注 2.

成小片，以便三位排版工人能同时工作. 那时，文章发表得很快，快得令人不可思议：星期一下午 3 点之前将文章提交给科学院，星期三上午修改清样，下周星期一就可见文章发表. 那个时候，直到 20 世纪 50 年代初，依然如此.

科学院通报曾经是数学交流的一项重要的工具. 1900 和 1901 年度, 在通报上发表文章的法国数学家有 Poincaré, icard, Painlevé, adamard, orel, Baire, ebesgue 等，外国数学家有 Stekloff, Liapounoff, Mittag-Leffler, Levi-Civita, Lindelöf, Féjer, Tzitzeica, Von Koch 等. 科学院通报是份重要的国际性刊物，为法国数学家和外国数学家共同喜爱. 那个时候通报上发表的数学论文能很好地概括当时世界范围内的大部分数学研究活动.

回过头来谈一谈我已提到过的法国数学家. 1901 年，Poincaré 42 岁，Picard 45 岁，Painlevé 38 岁，Hadamard 36 岁，Borel 30 岁，Baire 27 岁，Lebesgue 接近 26 岁.

Borel 是新一代的领头人物. 他曾是神童, 智力超群, 反应敏捷. 他在 1896 年就已引入了可列无穷事件, 预感到了现代概率论应有的特性. 1898 年, 他出版了一本有关函数论的著作. 该著作的主要部分论及直线上那样一些点集合，即，从区间出发，经过可列并集运算和求余集运算所得到的集合. 接着，他找到了测度应具备的主要性质，从而引入了集合的测度的新概念. 但是, 他未能建立起测度论的完整理论. 后来, 他主编了一套由 Gauthier-Villars 出版的专题著作丛书，其中有 Baire 和 Lebesgue 的著作.

Baire 的博士论文研究不连续函数，准确地说，连续函数级数的和函数. 他按照级数表示的不同方式将函数进行分类. 他将点集分为第一范畴集和第二范畴集. Baire 理论是纯拓扑性的. 这一观点有别于 Borel 的观点，并且一开始就得到了完善.

Lebesgue 十分了解 Borel 和 Baire 的工作. 他很欣赏 Baire, 并以 “你” 相称. 但是，他对 Borel 则称 “您”. 在他写给 Borel 的最初几封信中, 他用的称呼是 “尊敬的先生”, 他是在高等师范学校读书时结识 Baire 的. 他的同年级同学中有 Paul Montel 和 Paul Langevin. 他同样欣赏 Langevin, 不仅视之为物理学家，也视之为数学家. 他后来曾写道，Langevin 是 “另一类型的数学家”. 他喜好几何，熟悉经典分析，同样熟悉 Cantor 和意大利数学家 Dini, Peano, Volterra 的工作. 这些意大利数学家对于当时以 Hermite 或 Poincaré 为首的占统治地位的法国学派视为畸胎学的那部分数学很感兴趣. 正是这个时候，Hermite 在写给 Stieltjes 的信中说，他 “满怀厌恶和恐惧远离那令人伤心又可怜的不可微连续函数”. Poincaré 更加干脆地说，“过去，人们发明一种新函数是为了实践的需要，而今天，有人故意发明一些新函数以便对我们的父辈的逻辑推理吹毛求疵，这是他们的唯一目的”. 然而，从进入高等师范学校起，Lebesgue 就对简洁的事物感兴趣，不因循守旧. 经典曲面论中可展曲面由直线构成. 一张纸被扭曲后得到的就是一个可展曲面. 但是，Lebesgue 注意到，一张纸被揉皱之后得到的曲面就不再是可展曲面了. 那么，应建立什么样的曲面理论来延伸经典曲面论，从而包括更一般的情形呢？早在 1897 年之前，在高等师范读书时，他就和 Paul Montel 一起对此问题交换过意见. 1898 年和 1899 年两年间, 他因获得了教师资格 [4] 而享受到一份奖学金, 于是致力于研究这一问题. 自 1900 年起，他在南锡中学的巴黎中央学校预备班 [5] 做教师时，依然在研究同一问题. 1899 年和 1900 年度，他在科学院通报上发表了 5 篇文章. 这些文章都是讨论多元函数和曲面的，尤其是曲面的面积.

他的 1901 年的文章的题目《论定积分的一种推广》显得很谦逊. 按现代的观点看，文章

4 教师资格 (Agrégation) 为法国大学和中学教师的一种学衔，需要经过竞赛考试才能获得.

5 想进入高等学校的法国高中毕业生必须安插在中学的预备班学习两年. 预备班的毕业生具有大学二年级的水平.

引入了 Lebesgue 积分和 Lebesgue 测度两个具有深远意义的新概念. 而且, 这两个概念表述得简明扼要. 像其它大部分新兴事物一样, 这篇文章没有立刻得到认可. 德文的《 Jahrbuch über die Fortschritte der Mathmatik 》每年都统计并分析当年所有的数学出版物. 它用了好几页的篇幅介绍 Lebesgue 有关曲面的文章, 而对 1901 年的文章只用了三行字.

在 Lebesgue 之前, 所谓的积分就是 Riemann 积分. 为了对函数 $y=f(x)$ 求积分, Riemann 对自变量区间 (a,b) 进行分割, 进而考虑和式

$$\sum y_i(x_{i+1}-x_i),$$

其中 y_i 为区间 (x_i,x_{i+1}) 上变量 y 所取的某一值. 如果当分割加细时和式趋向某一极限, 该极限就是积分 $\int_a^b f(x)dx$. 于是, 称函数 f 在区间 (a,b) 上 Riemann 可积. Riemann 给出了函数可积的一个必要充分条件. Lebesgue 将该条件用他的测度概念以非常简单的方式译为: 函数的不连续点集的测度为零.

与 Riemann 不一样, Lebesgue 分割变量 y 的变化区间. 他对分割的每个区间 (y_j,y_{j+1}) 给出满足下列条件的点 x 的集合的测度

$$y_j\le f(x)\le y_{j+1},$$

记该测度为 m_j, 则积分的一个近似值为

$$\sum m_j y_j,$$

如果这些和式当分割加细时趋向于某个极限, 该极限就是 Lebesgue 意义下的积分. 于是, Lebesgue 称该函数是可和的. 在 1901 年的文章里, Lebesgue 仅限于讨论 x 和 y 的变化区间有限的情形. 稍后, 他去掉了这一约束. 不然, 许多后续的发展会受到限制.

1926 年, 在哥本哈根的一次演讲中, Lebesgue 是这样阐述他的观点的.

"按照 Riemann 的方法, 我们对依自变量 x 的大小顺序所提供的不可分割的量求和, 这有如没有条理的商人数钱, 碰到硬币数硬币, 碰到纸币数纸币. 而我们的做法像有条理的商人的做法:

我有一克朗 [6] 的货币 $m(E_1)$ 个单位, 共值 $1\cdot m(E_1)$.

我有两克朗的货币 $m(E_2)$ 个单位, 共值 $2\cdot m(E_2)$.

我有五克朗的货币 $m(E_5)$ 个单位, 共值 $5\cdot m(E_5)$.

…… 等等. 故, 总共有

$$S=1\cdot m(E_1)+2\cdot m(E_2)+5\cdot m(E_5)+\cdots\text{''}$$

请注意 Lebesgue 在此例中所用的记号. 他不是简单地写出 m_1,m_2,m_5, 而是明确地标出集合 E_j 和该集合的测度 $m(E_j)$. 对于一般的实值函数(不一定是整函数), 会出现由不等式 $u\le f(x)\le v$ 所定义的集合 E, 故有必要明确 $m(E)$ 的意义.

Lebesgue 心目中想得到如下形式的定理

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n=\int\lim_{n\to\infty}f_n.$$

6 克朗为丹麦等国的货币单位.

的确, 他也证明了这一定理, 条件是积分区间有限而被积函数 f_n 一致有界. 后来, 他将一致有界的条件弱化为绝对值 $|f_n|$ 被一个可积函数所控制. Lebesgue 定理是 Lebesgue 积分论的关键. Lebesgue 也很自然地希望积分是可加的, 即

$$\int(f+g)=\int f+\int g,$$

上述两个积分性质诱导出下列公式

$$\int\sum_1^{\infty}f_n=\sum_1^{\infty}\int f_n.$$

在 f_n 为两两互不相交的集合 E_n 的特征函数这一特殊情况下, 该公式应该成立, 即

$$m\left(\sum_1^{\infty}E_n\right)=\sum_1^{\infty}m(E_n).$$

这就是 Borel 所定义的测度的完全可加性: 互不相交的集合的可数并集的测度等于诸集合的测度之和. Borel 的出发点是区间的测度, 即区间的长度. 他接下来考虑区间的可数并集以及它们的余集, 进而考虑新集合的可数并集以及它们的余集, 如此继续. 最终他得到我们今天所说的 Borel 集合. 他自信可以在 Borel 集类, 即我们现在所称的 Borel 域上构造一个完全可加的测度. 但是, 他并没有去实现它: 他既没有在 1898 年的讲义中也从来没有实现它.

Lebesgue 需要 Borel 测度, 但 Borel 测度在当时还不存在. 按照构造 Borel 集合的方法逐步构造 Borel 测度有困难. 于是, Lebesgue 另辟蹊径. 直线上的点集总可以用区间的并集覆盖. 每一覆盖对应着诸区间长度之和. 再考虑所有可能的和的下确界. 这就是 Lebesgue 所定义的集合的外测度, Lebesgue 还简单地建立了内测度这个辅助概念. 当外测度和内测度一致时, 其共同值称为集合的测度, 而集合被称为是可测的. 这就是我们今天所谓的定义在 Lebesgue 域上的 Lebesgue 测度. Lebesgue 域要比 Borel 域大, 但 Lebesgue 测度在 Borel 域上的限制正是 Borel 测度.

建立 Borel 测度论的功劳无可争辩地应属于 Lebesgue. 他引入了一类新的集合, 其中包括所有的零测集. 任何一个 Lebesgue 意义下的可测集是一个 Borel 集和一个零测度之并. 因此, Borel 说, Lebesgue 的贡献仅在于引入了零测集.

Lebesgue 对 Borel 的这一说法很伤心, 两人的关系因此开始不和. Lebesgue 与 Baire 的关系也早已出现问题. Lebesgue 在写给 Borel 的书信 (Borel 的书信和资料一年前已存入科学院的档案) 中解释了当时矛盾冲突的情况. 1900 年代初期, Borel 最得命运的偏爱, 他的妻子很出色, 是数学家 Paul Appell 的女儿; Baire 一直在生病; 而 Lebesgue 很贫穷, 教学任务繁重 (在南锡的中学每周教 21 小时), 为家庭和经济问题疲惫不堪.

恰好在 1900 年之前, 法兰西学院成立了 Peccot 基金会, 目的在于每年让一位年龄不超过 30 岁的年青数学家介绍他的工作, 从而可以提供一点津贴. Peccot 课程今天依然存在, 在数学界享有盛誉. 最初的讲演者是 Borel (三年); 接下来是 Lebesgue, 他取代生病的 Baire; 然后是 Baire; 再后来又是 Lebesgue. 围绕着 Peccot 课程的安排以及大学职位的任命的争执, 只当是遗闻轶事. 但是, Peccot 的课程的影响是很大的.

继 1901 年的文章之后, Lebesgue 在三篇重要的论著中发展了他的积分理论: 1902 年题为《积分、长度、面积》的博士论文, 论文的题目就表明了积分与他先前的文章中讨论的几何问题之间的联系; 基于第一次 Peccot 课程写成的《积分和原函数研究讲义》; 基于第二次 Peccot 课程写成的《三角级数讲义》. 我将对这些工作做一个简单的介绍, 在此之前, 我想强调一下 Peccot 课程对于继 Baire 和 Lebesgue 之后的工作所起的作用. Lebesgue, Baire 和 Lebesgue 所讲的三门课程的听众不多, 但是当中有 Denjoy , 是他整理了 Baire 的讲义. 基于 Cantor, Baire, Lebesgue 和 Fatou 的工作, Denjoy 建立了一种称为"完全化" [7] 的新的积分理论. Pierre Fatou 的博士论文成于 1906 年, 是 Lebesgue 第二次 Peccot 课程的继续, 论及"三角级数和 Taylor 级数". 该论文充分体现了 Lebesgue 积分这一新工具在经典分析中的作用.

所以, 可以说 Fatou 和 Denjoy 是这个时期 Lebesgue 在法国的主要继承人. 在国外, 如英国、比利时、奥地利、俄罗斯和波兰, Lebesgue 的积分立刻得到了接纳、阐述和应用. 但是, 法国不教授 Lebesgue 积分, Lebesgue 本人也只是借 Peccot 讲座的机会讲解过他的积分论. 自从 1921 年他被任命为法兰西学院 [8] 的教授后, 他的所有课程, 除极个别例外, 都是有关别的课题. 直到 1950 年, Lebesgue 积分在世界各国已是一门经典课程, 然而在法国, 获得数学教师资格的人可能未曾听说过 Lebesgue 积分. Szolem Mandelbrojt 曾回忆起他当年的失望, 当他来到法国时找不到任何地方教授 Lebesgue 积分和由此派生的数学理论.

让我们回过头来考察 Lebesgue 分别于 1902 年、 1904 年和 1906 年完成的三项论著. 第一项是他的论文, 出发点是几何. 尽管他的论文包括并完善了他 1901 年有关积分的文章, 但他自始至终是在 1899 年和 1900 年的那些问题的启发下进行思考: 曲线的长度, 尤其是曲面的面积. 我将在此限于平面面积和它们与测度的关系进行讨论. Camille Jordan 曾经讲授过他的平面面积理论, 该理论深深地影响了 Lebesgue. 给定一个平面区域 D, Jordan 考虑所有包含 D 的多边形和所有包含在 D 内的多边形. 包含 D 的多边形面积的下确界称为"外面积", 包含在 D 内的多边形的面积的上确界称为"内面积" [9] 当外面积和内面积相同时, 称区域为可求积的, 其公共值称为区域的面积. 可见, Lebesgue 的外测度和内测度的思想出自 Jordan 的方法. 但是, 他对原有的定义做了根本的改变.

为了说明 Jordan 面积和 Lebesgue 面积之间的区别, 我将借用一个几何的例子, 该例子与 Lebesgue 论文的一个注解中提到的一个例子很相似. 设有三角形 ABC, 其面积为 S. 在 BC 边上取两点 B' 和 C'. 令 S_1 为三角形 $AC'B'$ 的面积. 从三角形 ABC 上去掉三角形 $AC'B'$ 的内部 [10], 得到两个新三角形 ABC' 和 $AB'C$, 两者面积之和为 $S-S_1$. 接下来, 依同样的方式从三角形 ABC' 和 $AB'C$ 中分别去掉以 C' 和 B' 为顶点以 S_2 和 S_3 为面积的三角形, 从而得到四个三角形, 其面积之和为 $S-S_1-S_2-S_3$, 如此继续以至无穷. 于是, 得到由三角形组成的包含在三角形 ABC 中的区域套, 它们相对于 ABC 的余集由面积分别为 $S_1, S_2, S_3, \cdots$ 的开三角形组成. 最终, 得到包含在三角形 ABC 中的一条曲线 Γ, 它由无穷多个三角形的边构成, 而诸三角形的面积之和为 $\sum_1^\infty S_n$. 如果用一段位于三角形 ABC 之外的圆弧将 B 和 C 两点连起来, 该弧线和曲线 Γ 一起构成一条简单闭曲线, 它包含某个区域 D. 若 $\sum_1^\infty S_n = S$, 则区域 D 是 Jordan 可求积的; 若 $\sum_1^\infty S_n < S$, 则区域 D 是非 Jordan 可求积的. 然而, 在 Lebesgue 意

7 法文原名为 Totalisation.

8 法兰西学院 (Collège de France).

9. 外面积原名 Etendue extérieure, 内面积原名 Etendue intérieure.

10 也要去掉 $C'B'$ 边.

义下，区域 D 总是 Lebesgue 可测的. 曲线 Γ 在 Lebesgue 意义下的面积总是 $S-\sum_1^\infty S_n$，这个数可能是正数也可能是零. 这样的曲线我们现在称之为分形.

1901 年的文章还突出地显示了 Lebesgue 积分的一个重要应用：它解释了有界函数的原函数问题. 准确地说，如果一个函数 f 在区间上可导，而且其导数 f' 有界，则差

$$f(x)-\int_0^x f'(t)dt$$

是一个常数. 如果 f' Riemann 可积，这一事实是已知的. 但是，有这样的情形出现：f' 存在且有界，但不是 Riemann 可积的. Volterra 曾给出过一个这样的例子，Lebesgue 把它写进了他的论文. 1904 年的《积分讲义》描绘和分析了自 Cauchy 以来各种不同的积分概念，特别是 Dirichlet 积分和 Riemann 积分；刻画了 Dirichlet 可积函数和 Riemann 可积函数，并研究了它们与导函数的关系. Denjoy 在 1912 年进一步推广了 Lebesgue 积分，从而可以计算更加一般的可导函数的原函数，也就是说，可以去掉 f' 有界的假设.

继《积分讲义》后，出现了一批讲授 Lebesgue 积分及其应用的优秀书籍，特别是，Charles de la Vallée Poussin 于 1916 年所写的《集合函数，Lebesgue 积分，Baire 类》，Felix Hausodrff 于 1927 年所写的《集合论》. 但是，权威著作应是 Stanislas Saks 于 1933 年所写的《积分论》，它是波兰数学丛书中的一种，用法语写成. Saks 是这样评价 Lebesgue 所找到的积分和微分之间的关系的："Lebesgue 先生的功绩并不局限于创立了一种新的广义的积分概念，也不局限于建立了该概念与测度论之间的紧密联系，他的工作的价值首先在于他的与积分论同时建立起来的导数理论. 正因为如此，Lebesgue 先生的发现才使得我们在分析学中的不同分支中找到众多的用武之地."

这些不同分支中的第一个是三角级数理论. 从历史观点看来，积分与三角级数之间一直有着密切的联系. 这一点由下面的事实来说明，三角级数的系数由积分经过 Fourier 公式计算出来：如果

$$f(t)=\sum c_n e^{\mathrm{i}nt},$$

则

$$c_n=\int_0^{2\pi} f(t)e^{-\mathrm{i}nt}\frac{dt}{2\pi}.$$

定积分的记号 $\int_a^b$ 是在这种情况下由 Fourier 引入的. Fourier 认为这些公式是普适的. 事实上，级数论、积分论和后来的泛函分析的一大部分内容旨在明确这些公式的意义. 与此相关的几个突出的发展阶段是：Dirichlet 的 1830 年的文章、Riemann 的 1854 年论三角级数的论文、Cantor 的 1870 年的论文、1900 的 Féjer 定理 (依然是科学院通报上的一篇短文)、Lebesgue 的 1906 年出版的讲义、1907 年的 Riesz-Fisher 定理、Denjoy 的 1921 年的二次完全化，Schwartz 的 1949 年的广义函数论. 这一清单并未终结.

Dirichlet 认为，对连续函数求积分就可以了，因为一般函数的积分可以分解为不连续点之间连续函数的积分. 作为不可积函数的例子，他定义了 $(0,1)$ 区间上的这样一个函数，在无理点上取值为 1，在有理点上取值为 0. 我们知道，Riemann 积分更一般一些，但 Dirichlet 函数还是不可积. 然而，在 Lebesgue 意义下，这是一个可积函数 (为避免混淆，Lebesgue 称它为"可和")，其积分等于 1.

Riemann 在他的论文中研究了逐点收敛的三角级数的和函数，给出了这些函数的特征性质. 但是，他没有求助于级数系数的计算，因为这些函数一般是非 Riemann 可积的. Cantor 证明了，级数的系数确实由级数的和函数唯一确定. Lebesgue 的一个漂亮的结果是，三角级数的和函数，如果有界则一定是可积的，而且其系数可由 Fourier 公式求得. 要去掉函数有界的条件，得等到 Denjoy 和他的二次完全化.

Lebesgue 论三角级数的讲义包含许许多多新结果. 与 Fatou 的论文一起，它立即征服了法国之外的数学界. 有两点值得特别注意，其一，Lebesgue 首次在该讲义中给出了积分的一般定义，无论函数有界或无界；其二，这也是 Lebesgue 最后一次讲解他的积分论.

在谈到 Lebesgue 积分的产生时，我已经提到了继 Lebesgue 之后的工作. 关于 Lebesgue 积分的影响，我只想涉及三个方面：泛函分析、现代概率论以及 Lebesgue 测度和 Lebesgue 积分的直接延伸.

1907 年，匈牙利数学家 Fréderic Riesz 和奥地利数学家 Ernst Fisher 在科学院通报上连续发表了五篇文章，为 Lebesgue 积分提供了新观点. 通过稍微不同的方法，他们分别给出了区间 $(0,2\pi)$ 上平方可积函数的 Fourier 系数的特征：系数绝对值的平方构成一个收敛级数. 因此，不仅有下列等式 (Fatou 称之为 Parseval 等式) 成立

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}|c_n|^2=\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\frac{dt}{2\pi},$$

这里 c_n 是 Fourier 系数 (我的意思是，在 Lebesgue 积分意义下依 Fourier 公式求得的系数)，而且像 Riesz 在 1949 年在一篇文章中所戏言，Fourier 公式是一张 “永久的双程票”，使我们来回于两个无穷空间，一个是平方可和的序列空间 ℓ^2，另一个是平方可积的函数空间 L^2. 若用学术性的语言描绘之，则可以这样说，Fourier 变换是空间 ℓ^2 和空间 L^2 之间的一个同构映射. 这两个空间早前已由 Hilbert 引入.

无论是 Fisher 还是 Riesz 的证明，其关键在于 “ L^2 是完备的”. 稍后，Riesz 证明了更一般的结果 “ L^p 是完备的”. 这里 L^p 是指绝对值的 p 次方可积的函数的空间，p 为 ≥ 1 的任意实数.

“ L^2 是完备的” 意味着可以将 L^2 作为欧氏空间来处理. Fisher 和 Riesz 都明确地提到了某种 “函数几何” 的直觉. 视函数为抽象空间的点的想法并不是全新的：这种想法在 Volterra 和 Hadamard 的工作中，尤其是 Maurice Fréchet 的 1906 的论文中，就已经有了. 但这一想法以一种令人惊讶的形式出现在 Riesz 和 Fisher 的工作中. 量子力学的奠基者立刻将 L^2 空间作为工具使用. 另外一些函数空间或广义函数空间可以在 L^2 的基础之上建成立起来，并且保持 Hilbert 空间的几何结构，如 Sobolev 空间，它们是偏微分方程研究中必不可少的工具.

空间 L^p $(p\neq 2)$ 具有不同的几何结构，这是一些 Banach 空间. 正是 Banach 在其名著《线性算子理论》 (波兰数学丛书中的第一号) 中给出了定理 “ L^2 是完备的”、 “ L^p 是完备的” 的现代形式. 而在 Fisher 和 Riesz 的文章中，定理的表述要长得多. 1907 年时，空间 L^p 尚未定名，形容词 “完备的” 具有另一种意思. Banach 定义了现代意义的完备性，并命名了 L^p 空间 (L 是 Lebesgue 的起首字母). 他将主要的内容搁置在定义中，故此，定理的陈述显得十分简洁.

Banach 的风格是这样的. 起初，有一个关于 Fourier 系数的问题和一个漂亮的答案，即 Riesz-Fisher 定理；接下来，出现一个起中介作用的命题，它作为引理被使用，又作为重要结果

而享有定理之名. 但是, 该定理的陈述又长又复杂, 于是, 引入了两个定义. 这样就极大地简化了定理的陈述. 命题的精华转移到了定义之中.

现代函数分析用到不同于 L^p 的其它空间, 但不能抛弃 L^p 空间. 将 Lebesgue 视为泛函分析的奠基人之一不为过分, 因为积分作为线性形式极为重要, 而且通过积分可以构造新的泛函空间.

Lebesgue 从两个主要方面影响了概率论的发展. 与此相关的是, 波兰数学家 Hugo Steinhaus 和美国数学家 Nobert Wiener 在 20 世纪 20–30 年代所做的工作.

Steinhaus 的想法是, 考虑在区间 $I = (0,1)$ 上建立概率. 他确立了这样一个对应关系: 事件是 I 中的 Lebesgue 可测集, 其概率是该集合的 Lebesgue 测度; 随机变量是定义在 I 上的 Lebesgue 可测函数, 其分布是 Lebesgue 测度在函数作用下的像, 其期望是函数的 Lebesgue 积分 (如果积分存在的话), 如此等等. 他指出了如何在 I 上构成一列以 Lebesgue 测度为分布的独立随机变量. 在此基础之上, 他为任意一个独立随机变量序列或级数建立了一个模型. 他得到的第一个应用是这样的: 设某个 Taylor 级数以某个圆周 C 为收敛圆, 如果以自然的概率改变系数的幅角, 则几乎必然 (即以概率 1 成立) 得到一个不能解析延拓到 C 之外的函数. 这曾是 Borel 所想到的, 可以追溯到 1896 年. 但是, Borel 也好, 任何其他人也好, 都没有在此之前将这一思想转变成严格的数学命题.

Wiener 的想法完全不同. Wiener 曾经读过 Einstein 和 Jean Perrin 的著作. 这两位物理学家既从理论上又从实验上建立了一套 Brown 运动的物理理论. Perrin 指出, Brown 运动的轨道使人想起数学家们的不可微连续函数. 这类函数在当时尚未被物理学界广泛了解, Brown 运动的物理现实暗示着应有一个数学模型. Wiener 的计划是这样的: 考虑在时刻 $t = 0$ 取某个固定值的连续函数的集合, 在其上构造一个满足 Einstein 方程的概率测度, 使得这些函数几乎必然具有适当的性质, 如, 无处可微性. 在一个比区间 I 更丰富的集合上构造测度并不是新鲜事. 但是, 构造 Wiener 测度是一个更了不起的壮举. Wiener 的做法是, 预先给定过程应满足的条件 (具有独立增量的 Gauss 过程), 构造测度以便这些条件得到满足. 一旦概率测度构造好之后, 可以将函数作为随机元来处理. Wiener 称该函数为基本随机函数 (fundamental random function). 后来, Paul Lévy 简单地称之为 Brown 运动. 这是一个使人着迷的研究对象, 它长期以来在许多不同的数学领域得到了广泛的应用. 物理学家和数学家不断地对它提出令人赞叹的猜想, 又得到了漂亮的定理.

可见, Wiener 并没有使用 Lebesgue 测度, 而是在函数空间上构造了另一个不同的测度. 相反地, Steinhaus 将装备有 Lebesgue 测度的区间 $(0,1)$ 作为普适概率空间. 借用 Fourier-Steinhaus 级数, 完全可以按 Steinhaus 的观点构造 Brown 运动. Fourier-Wiener 级数是一个三角级数, 其系数是一列独立的 Gauss 随机变量. 1934 年, Wiener 最后一次讲述他的基本随机函数时用的就是 Fourier-Wiener 级数.

然而, 正当 Wiener 向 Steinhaus 看齐时, Kolmogorov 继承 Wiener 的思想, 依照过程的分布构造相应的概率空间. 在他的著作《概率论基础》 中, Kolmogorov 定义概率空间为一个集合 Ω, 赋以一个由 Ω 的子集 (称为事件) 构成的 σ- 域 A 和一个定义在 A 上的完全可加的测度 P (称为概率). 从此以后, 这个三元组合 (Ω, A, P) 将所有的概率论学者团结在一起. Kolmogorov 的观点比 Steinhaus 的观点要灵活, 因为在研究的过程当中, 可以更换概率空间 Ω 或 σ- 域 A. 不过, 最重要的概率空间均同构于 Lebesgue 空间, 即直线上装备有 Lebesgue 域和 Lebesgue 测度的 $(0,1)$ 区间.

即使是只限于泛函空间和概率论， Lebesgue 积分的影响就已经很深了. 它的影响还延伸到其它方面. 我仅做简单的回顾.

先说测度的几何理论. 该理论的奠基性工作是 Felix Hausdorff 发表于 1919 的文章. Hausdorff 将 Lebesgue 外测度的构造推广到很一般的情形. 他不仅考虑直线，而且考虑一个任意的没有特定性质的空间; 不仅考虑区间，而且考虑一类可以覆盖空间中任意集合的小集合. 给定空间的一个集合，他为集合的每一个覆盖确定一个质量，即覆盖中小集合（通常需要无穷个小集合）的质量之和. 然后，他考虑与所有覆盖相对应的质量的下确界. 他要求覆盖满足某种精细条件, 比如, 小集合的半经不超过给定的 ε. 接下来, 他考虑强化精细条件时（如当 ε 趋向于零时）, 上述下确界的极限. 于是，他得到一个他希望得到的测度. 该测度具有 Lebesgue 外测度的所有性质，它可能有限也可能无限. 这就是 Hausdorff 测度. 如果空间是度量空间，可以选取所有的球作为小集合类，而选取直径的某个幂（如 d^α ）作为球的质量. 于是，得到 α 维的 Hausdorff 测度. 通常，该测度当 α 较小时等于无穷大，而当 α 较大时等于零. Hausdorff 维数就是区分这两种情况的临界值.

在分形的浪潮到来之前， Hausdorff 测度和 Hausdorff 维数在调和分析和位势理论中已经扮演了重要的角色. 位势理论中的自然的概念不是集合测度，而是集合的容量. Choquet 建立了容量理论，他是 Lebesgue 的“远房”继承人.

Lebesgue 测度的另一推广涉及到那样的空间 – 可以考虑其子集合的迭合性的空间. 在一定的条件下, 可以构造这样一个测度（若考虑正规化则测度还是唯一的）, 使得能够迭合的集合具有相同的测度. 这一发现属于匈牙利数学家 Alred Haar. 随后， Banach 做了简化. 其最终确定的形式出现在 Saks 的《积分论》当中. Haar 测度是拓扑群研究中的基本工具.

Borel 时代尚未使用 σ- 域这一名字. Borel 觉得分析中的运算走不出 Borel 域. Lebesgue 也持这一观点, 他在 1905 年还以为证明了这一点. 这一错误的观点引发了一系列丰富的研究成果. 1917 年初, 科学院通报上发表了俄国数学家 Nicolas Lusin 和 M.Ya Souslin 的两篇短文, 他们证明了相反的结论: 存在一列多项式 $P_n(x)$, 它在某个 Borel 集合上收敛于 $y(x)$, 但是， $y(x)$ 所取值的集合不是 Borel 集. 因此， Borel 集合的像集不一定是 Borel 集. 更有趣的是，二元对 $(x, y(x))$ 构成 Borel 集, 但它在 y 轴上的投影，即上述 $y(x)$ 的像集合不是 Borel 集. 可见，经典分析强行走出了 Borel 域. 介于 Borel 域和 Lebesgue 域之间的是 Lusin 域，它由 Lusin 名为解析集的集合构成，也就是 Borel 集合在连续函数映射下的像集.

20 世纪 20 年代, 一个杰出的数学学派在莫斯科发展壮大，它的创立者是 Lusin. Lebesgue 及其著作在莫斯科比在法国更为人所知. Lebesgue 思想的光芒曾经照耀在匈牙利，波兰和俄罗斯.

再说几句 Lebsgue 积分的过去和今天作为结束. Cauchy 时代已形成一些不可触犯的数学概念，如序列或级数的收敛性、连续性、可微性、解析性. 函数的一般概念也在此时建立起来了. 寻求可积函数的概念是很自然的事. Cauchy 和 Dirichlet 试图把可积性和连续联系在一起. 在此之后， Riemann 积分在数十年内得到了共同的认可，一个函数 Riemann 可积则称为可积. 这也是为什么 Lebesgue 采用形容词“可和”表示按他的方式可积的函数. Hardy 和 Littlewood 首先称 Lebesgue 可积函数为可积. 20 世纪的积分是 Lebesgue 积分，但是它也有延拓和修正，如: Denjoy 积分、 Perron 积分、 Henstock 积分、 Radon 积分、 Saks 积分、 Haar 积分、 Wiener 积分、Itô 积分、 Feyman 积分. 这些不同的积分出现在实变量函数分析，泛函分析，概率论和理论物理学中. Feyman 积分令数学家们窘困. 它的另一种表达方法接近

Lebesgue 积分, 这归功于 Pierre Cartier 和 Cécile Witt. 他们对所需积分加以适当条件以保证唯一性, 从而给出构造积分的过程.

积分的概念是多义的. 可以在不同的层次, 作不同的选取, 教授积分论. 正如 Youri Manin 所言, 积分是同一领域各种不同事物的组合. 求积微分方程时, 给定的信息是瞬时的变化, 得到的是自然现象随时间的变化. 在中学里, 可以限制于求解 $y' = f(x)$, 过去的数年里确实是这样做的; 也可以限制于面积的计算, 这是目前中学里的选择. 但无论如何, 不要顾此失彼. 至于较高水平的教学, 可以将实函数的积分与泛函分析或概率论联系在一起. Bourbaki 将积分表述成连续函数空间上的线性形式, 因此, 相应的基础空间是拓扑空间. Denjoy 严格地区分 Baire 的拓扑观和 Lebesgue 的测度观, 他曾猛烈地批评过 Bourbaki. 当代的概率学家认为 Denjoy 是有理的. 不过, 读了 Laurent Schwartz 的自传后会发现, Bourbaki 的这一错误, 如果算是错误的话, 对寻求广义函数的正确概念起了决定性的作用. 广义函数是某些函数空间上的线性形式.

最终结论是, 无论一项数学成就多么完善 (Lebesgue 1901 年的发现一开始就达到了完善的地步), 数学的发展要比单项的数学成果丰富得多. 继 Lebesgue 积分之后, 数学的发展欣欣向荣, 这证实了我做这个长时间报告的必要性.

(范爱华 译, 译者单位: 武汉大学数学系, 武汉, 湖北, 430072)

Foundation and Influence of Lebesgue Integrals

Jean-Pierre Kahane

(Academic of Science of Paris, France) France)

Abstract This article is a translation of a paper by Jean-Pierre Kahane, "Naissance et posterite de Lebesgue" in the journal of Comptes Rendus de l'Academemie des Sciences de Paris, translated by Anhua Fan. It talks about the history background of Lebesgue integrals and its influence to mathematics.

Key words Lebesgue integral